GE-034018 Seat No. ________

B. Sc. (Sem. IV) Examination

March - 2019

CC BSCC-406A : Mathematics

(Advanced Calculus - II)

Time : **3** Hours] [Total Marks : **70**

સૂચના : (૧) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ પાંચ પ્રશ્નો છે.
(૨) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(૩) સંકેતો સાર્વત્રિક છે.
(૪) જમણી બાજુના અંકો જે તે પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્નોના ગુણભાર દર્શાવે છે.

૧ (અ) સંકલનનો ક્રમ બદલો. ૮

(૧) $\displaystyle\int_{0}^{4a}\int_{y=\frac{x^2}{4a}}^{y=2\sqrt{ax}} f(x,y)\,dx\,dy$

(૨) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{x=\frac{4y}{3}}^{x=\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

અથવા

(અ) ત્રિમિત સંકલનની સમજ આપો. ત્રિમિત સંકલનનો ઉપયોગ કરી 'a' ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું ઘનફળ મેળવો.

(બ) માગ્યા પ્રમાણે જવાબ આપો : ૬

(૧) ધ્રુવીય યામમાં પરિવર્તન કરી સંકલનની કિંમત મેળવો.

$$\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(x^2+y^2\right) dx\,dy$$

(૨) કિંમત શોધો : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x+y)\,dy\,dx$

અથવા

(બ) કિંમત શોધો : $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

જ્યાં V એ ગોલકો $x^2+y^2+z^2=a^2$ અને $x^2+y^2+z^2=b^2$ થી સીમિત પ્રદેશ છે. જ્યાં $b>a$.

૨ (અ) બેવડું સૂત્ર લખો અને સાબિત કરો. ૭

અથવા

(અ) પ્રચલિત સંકેતમાં સાબિત કરો : $\beta(m,n)=\frac{\overline{|m}\ \overline{|n}}{\overline{|m+n}}$.

(બ) માગ્યા પ્રમાણે જવાબ આપો : ૭

(૧) સાબિત કરો કે $\beta(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\ \cos^{2n-1}\theta\ d\theta$.

(૨) સાબિત કરો કે $\overline{|n}=(n-1)\overline{|n-1}$.

અથવા

(બ) (૧) સાબિત કરો : $\overline{\left|\frac{1}{2}\right.}=\sqrt{\pi}$.

(૨) કિંમત મેળવો : $\int_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^{10} dx$.

૩ (અ) ગૉસનું ડાઈવરજન્સનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૭

અથવા

(અ) ગ્રીનનું પ્રમેય ચકાસો : $\oint_C \left(y^2dx+x\,dy\right)$

જ્યાં C એ $(\pm1,\ \pm1)$ શિરોબિંદુવાળા ચોરસની પરિમિતી છે.

(બ) પ્રચલિત સંકેતમાં સાબિત કરો : ૭

$\nabla^2 f(r)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$ જ્યાં $r^2=x^2+y^2+z^2$.

અથવા

(બ) બિંદુઓ $O(0,0)$થી $A(1,1)$ સુધીના નીચેના વક્ર પર રેખા સંકલન $\int x\,dy - y\,dx$ મેળવો.

(a) રેખા $y = x$

(b) પગથિયા માર્ગ $y = 0, x = 1$

(c) પગથિયા માર્ગ $x = 0 \quad y = 1$.

૪ (અ) આંશિક વિકલ સમીકરણ માટેનું લાગ્રાન્જનું પ્રમેય લખો અને તેના ઉકેલને મેળવવાની સમજ આપો. ૭

અથવા

(અ) પૃષ્ઠ $Z = xy + f(x+y)$નું આંશિક વિકલ સમીકરણ શોધો.

(બ) આંશિક વિકલ સમીકરણ $x^2 p + y^2 q = \left(x^2 - y^2\right)z$ નો ઉકેલ મેળવો. ૭

અથવા

(બ) આંશિક વિકલ સમીકરણ $x^3 p + y^3 q = \left(x^2 - xy + y^2\right)z$ ઉકેલો.

૫ ટૂંકમાં જવાબ આપો : (ગમે તે સાત) ૧૪

(૧) $\iint\limits_S xy\,dy\,dx$ કિંમત શોધો, જ્યાં $S = [0,1] \times [0,1]$

(૨) બીટા અને ગામા વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

(૩) સાબિત કરો કે $\beta(m,n) = \beta(n,m)$.

(૪) ડાઈવરજન્સ અને કર્લની વ્યાખ્યા આપો.

(૫) સાબિત કરો $\nabla(C \cdot R) = C$ જ્યાં $R = (x, y, z)$ $C = (C_1, C_2, C_3)$.

(૬) ત્રિમિત સંકલનનું કાર્ટેઝીયનનું ગોલીય રૂપાંતરમાં દર્શાવો.

(૭) સમતલ માટે ગ્રીનનું કથન લખો.

(૮) આંશિક વિકલ સમીકરણની કક્ષા અને પરિમાણની વ્યાખ્યા આપો.

(૯) પૃષ્ઠ $Z = ax + by + 1$ જ્યાં a, b સ્વૈર અચળાંકો છે ને અનુરૂપ વિકલ સમીકરણ મેળવો.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) Total five questions in this paper.
(2) All questions are compulsory.
(3) Notations are usual meaning.
(4) Figures to the right indicate full marks of the question/sub-question.

1 (a) Change order of integration : **8**

(1) $\int_{0}^{4a} \int_{y=\frac{x^2}{4a}}^{y=2\sqrt{ax}} f(x,y)\, dx\, dy$

(2) $\int_{0}^{3} \int_{x=\frac{4y}{3}}^{x=\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\, dy\, dx$

OR

(a) Explain triple integration. Using triple integration find the volume of sphere whose radius is '*a*'.

(b) Do as directed : **6**

(1) Transform the change of given double integration into polar form :

$$\int_{0}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(x^2+y^2\right) dx\, dy$$

(2) Find the value $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x+y)\, dy\, dx$.

OR

(b) Evaluate $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Where V is region bounded by spheres $x^2+y^2+z^2=a^2$ $x^2+y^2+z^2=b^2$ where $b>a$.

2 (a) State and prove 'Duplication formula'. **7**

OR

(a) In usual notation prove that $\beta(m,n)=\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$.

(b) Do as direct : **7**

(1) Prove that $\beta(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$.

(2) Prove that $\Gamma n=(n-1)\,\Gamma(n-1)$.

OR

(b) (1) Prove that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

(2) Find the value $\int_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^{10} dx$.

3 (a) State and prove Gauss divergence theorem. **7**

OR

(a) Verify Green theorem for $\oint\limits_C \left(y^2dx+x\,dy\right)$

where C is the boundary of the square $(\pm 1,\ \pm 1)$.

(b) In usual notation prove that **7**

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) \text{ where } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

OR

(b) Evaluate $\int x\,dy - y\,dx$ over the following curves from $O(0,0)$ to $A(1,1)$.

(a) Straight line $y = x$

(b) The step path $y = 0, x = 1$

(c) The step path $x = 0 \quad y = 1$

4 (a) State Lagrange's theorem for partial differential equation and discuss solution method of this equation. **7**

OR

(a) Find partial differential equation of surface $Z = xy + f(x+y)$.

(b) Solve the partial differential equation **7**

$$x^2 p + y^2 q = \left(x^2 - y^2\right) z.$$

OR

(b) Solve the partial differential equation

$$x^3 p + y^3 q = \left(x^2 - xy + y^2\right) z.$$

5 Answer in short : (any seven) **14**

(1) Find the value $\iint_S xy\,dy\,dx$ where $S = [0,1] \times [0,1]$.

(2) Define Beta and Gamma function.

(3) Prove that $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.

(4) Define Divergence and Curl.

(5) Prove that $\nabla(C \cdot R) = C$ where $R = (x, y, z)$ $C = (C_1, C_2, C_3)$.

(6) State Cartesian to polar co-ordinate of triple integral.

(7) State Green theorem in plane.

(8) Define order and degree of the partial differential equation.

(9) Find partial differential equation of the surface $Z = ax + by + 1$ where a and b are constants.