SHRI GOVIND GURU UNIVERSITY, GODHRA
B.Sc. Semester-III
Mathematics-202
(LINEAR ALGEBRA-I)

Prof. V. L. SHUKLA
M.Sc., M.Phil.
(I/C PRINCIPAL)

Dr. AMIT SHARMA
NET-JRF/SRF (CSIR)
(ASSISTANT PROFESSOR)

Department of Mathematics
Shri P.N. Pandya Arts, M.P. Pandya Science & Smt. D.P. Pandya Commerce College, Lunawada-389230, Mahisagar,
Gujarat, india.

Outline

- **Topic-1:** Vector Space (સદિશ અવકાશ).
- **Topic-2:** Subspaces (ઉપાવકાશ).
- **Topic-3:** Span (વિસ્તૃતિ).
- **Topic-4:** Intersection, Addition and Direct Sum of Subspaces (ઉપાવકાશો નો સરવાળો, પ્રત્યક્ષ સરવાળો અને છેદ).

Vector Space

Definition (વ્યાખ્યા): જો ગણ V એક અરિક્ત ગણ હોય અને F વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું ક્ષેત્ર હોય, જો દરેક $x, y \in V$ અને દરેક $\alpha \in F$ માટે x અને y નો સરવાલો $x + y$ તથા α અને x નો સદિશ ગુણાકાર αx નીચે દર્શાવેલ પૂર્વધારણાઓનું સમર્થન કરતુ હોય તો ગણ V ને સદિશ અવકાશ કહે છે:
દરેક $x, y, z \in V$ અને દરેક $\alpha, \beta \in F$ માટે,
$V_1 : x + y = y + x$
$V_2 : (x + y) + z = x + (y + z)$
$V_3 : x \in V$ માટે $\theta \in V$, જેથી
$x + \theta = \theta + x = x$ (અહીં θ ને શૂન્ય સદિશ કહે છે.)
$V_4 : x \in V$ માટે $\theta \in V$, જેથી
$x + x' = x' + x = \theta$ (અહીં x' ને x નો વિરોધી સદિશ કહે છે.)
$V_5 : \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
$V_6 : (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
$V_7 : (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$
$V_8 : 1.x = x$, જ્યાં 1 એ ક્ષેત્ર F ની એકમ સંખ્યા છે.

Theorem based on Vector Space: (R^n)

Theorem 1 (પ્રમેય 1): ગણ R^n એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે, તેમ સાબિત કરો.

Proof (સાબિતી): ધારો કે,

$x = (x_1, x_2, x_3, ...x_n) \in R^n$,

$y = (y_1, y_2, y_3, ...y_n) \in R^n$,

$z = (z_1, z_2, z_3, ...z_n) \in R^n$.

હવે $(x, y, z) \in R^n$ અને $(\alpha, \beta) \in R^n$ સ્વીકારીશું.

$V_1 : x + y = y + x$

LHS $\Leftrightarrow x + y$

$= (x_1, x_2, x_3, ...x_n) + (y_1, y_2, y_3, ...y_n)$,

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...x_n + y_n)$,

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, ...y_n + x_n)$,

$= (y_1, y_2, y_3, ...y_n) + (x_1, x_2, x_3, ...x_n)$,

$= y + x \Leftrightarrow$ RHS.

Continued...

Theorem based on Vector Space: (R^n)

$V_2 : (x+y)+z = x+(y+z)$

LHS $\Leftrightarrow (x+y)+z$

$= \{(x_1+y_1, x_2+y_2, ...x_n+y_n)\} + (z_1, z_2, z_3, ...z_n),$

$= \{(x_1+y_1)+z_1, (x_2+y_2)+z_2, ...(x_n+y_n)+z_n\},$

$= \{x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2), ...x_n+(y_n+z_n)\},$

$= (x_1, x_2, ...x_n) + \{(y_1+z_1, y_2+z_2, ...y_n+z_n)\},$

$= x+(y+z) \Leftrightarrow$ RHS.

$V_3 : x+\theta = \theta+x = x$

$\because \theta = (0, 0, 0....0) \in R^n,$

LHS $\Leftrightarrow x+\theta,$

$= (x_1+0, x_2+0, ...x_n+0),$

$= (x_1, x_2, ...x_n),$

$= x.$

Theorem based on Vector Space: (R^n)

RHS $\Leftrightarrow \theta + x$,
$= (0 + x_1, 0 + x_2 + 0, ...0 + x_n + 0)$,
$= (x_1, x_2, ...x_n)$,
$= x$.
$\therefore$ LHS=RHS.
$V_4 : x + x' = x' + x = \theta$
$\because x' = (-x_1, -x_2, ... - x_n)$,
LHS $\Leftrightarrow x + x'$,
$= (x_1, x_2, ...x_n) + (-x_1, -x_2, ... - x_n)$,
$= \{x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), ...x_n + (-x_n)\}$,
$= (0, 0, ...0)$,
$= 0$.

Continued...

Theorem based on Vector Space: (R^n)

$$\begin{aligned}
&\text{RHS} \Leftrightarrow x' + x, \\
&= (-x_1, -x_2, \ldots - x_n) + (x_1, x_2, \ldots x_n), \\
&= \{(-x_1) + x_1, (-x_2) + x_2, \ldots (-x_n) + x_n\}, \\
&= (0, 0, \ldots 0), \\
&= 0. \\
&\therefore \text{LHS=RHS.} \\
&V_5 : \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y \\
&\text{LHS} \Leftrightarrow \alpha.(x + y), \\
&= \alpha.\{(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) + (y_1, y_2, y_3, \ldots y_n)\} \\
&= \alpha.\{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n)\}, \\
&= \{\alpha.(x_1 + y_1), \alpha.(x_2 + y_2), \ldots \alpha.(x_n + y_n)\}, \\
&= (\alpha.x_1, \alpha.x_2, \ldots \alpha.x_n) + (\alpha.y_1, \alpha.y_2, \ldots \alpha.y_n), \\
&= \alpha.x + \alpha.y \Leftrightarrow \text{RHS}
\end{aligned}$$

Theorem based on Vector Space: (R^n)

$V_6 : (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$

LHS $\Leftrightarrow (\alpha+\beta).x$,

$= (\alpha+\beta).\{(x_1, x_2, x_3, ...x_n)\}$,

$= \{(\alpha+\beta).x_1, (\alpha+\beta).x_2, ... (\alpha+\beta).x_n\}$,

$= \{(\alpha.x_1, \alpha.x_2, ...\alpha.x_n) + (\beta.x_1, \beta.x_2, \beta.x_n)\}$,

$= \{\alpha.(x_1, x_2, ...x_n) + \beta.(x_1, +x_2, x_n)\}$,

$= \alpha.x + \beta.x \Leftrightarrow$ RHS.

$V_7 : (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$

LHS $\Leftrightarrow (\alpha.\beta).x$,

$= (\alpha.\beta).(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$

$$= \{(\alpha.\beta.x_1), (\alpha.\beta.x_2), ... (\alpha.\beta.x_n)\} \tag{1}$$

$= \{\alpha.(\beta.x_1), \alpha.(\beta.x_2), ...\alpha.(\beta.x_n)\}$

$= \alpha.\{(\beta.x_1), (\beta.x_2), ... (\beta.x_n)\}$

$= \alpha.\{\beta.(x_1, x_2, ...x_n)\}$

$= \alpha.(\beta.x)$

Theorem based on Vector Space: (R^n)

RHS $\Leftrightarrow \beta.(\alpha.x)$,
હવે સમીકરણ (1) પરથી,
$= \{\beta.(\alpha.x_1), \beta.(\alpha.x_2), ...\beta.(\alpha.x_n)\}$,
$= \beta.(\alpha.x_1, \alpha.x_2, ...\alpha.x_n)$,
$= \beta.(\alpha.x)$,
$\therefore (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$
$V_8 : 1.x = x$
LHS $\Leftrightarrow (1.x)$,
$= 1.(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$
$= (1.x_1, 1.x_2, ...1.x_n)$
$= (x_1, x_2, x_3, ...x_n)$
$= x \Leftrightarrow$ RHS.
આમ R^n વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ હોવા માટેની ઉપરોક્ત આઠ પૂર્વધારણાઓનું સમર્થન કરે છે. તેથી R^n એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે.

Properties of Vector Space

Theorem 2 (પ્રમેય 2): જો V એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ હોય અને θ એ V નો શૂન્ય સદિશ હોય તો સાબિત કરો કે,
(1). $x+y=y+x \Rightarrow y=z$ જ્યાં $x,y,z \in V$.
(2). $\alpha.x=\alpha.y \Rightarrow x=y$ જ્યાં $x,y \in V$. અને $\alpha \in R-\{0\}$.
(3). $\alpha.\theta=\theta$ જ્યાં $\alpha \in R$.
(4). $(-1).x=-x$ જ્યાં $x \in V$.

Proof (સાબિતી): (1).
$x+y=y+x,\ x,y,z \in V,$
$\Rightarrow -x+(x+y)=-x+(x+z),$
$\Rightarrow (-x+x)+y=(-x+x)+z,$
$\Rightarrow \theta+y=\theta+z, \qquad (\because \theta \in V)$
$\Rightarrow y=z.$

Properties of Vector Space

(2). દરેક $x, y \in V$. અને $\alpha \neq 0$ માટે

$\therefore \alpha.x = \alpha.y$

$\Rightarrow \alpha^{-1}.(\alpha.x) = \alpha^{-1}.(\alpha.y), \Rightarrow (\alpha^{-1}.\alpha).x = (\alpha^{-1}.\alpha).y,$

$\Rightarrow 1.x = 1.y,$

$\Rightarrow x = y.$

(3). $\alpha \in R$ માટે,

$\alpha.\theta = \theta$

$\Rightarrow \alpha.\theta = \alpha.(\theta + \theta),$

$\Rightarrow \alpha.\theta = \alpha.\theta + \alpha.\theta,$

$\Rightarrow \{-(\alpha.\theta)\} + \alpha.\theta = \{-(\alpha.\theta)\} + (\alpha.\theta + \alpha.\theta),$

$\Rightarrow \theta = \{-(\alpha.\theta) + (\alpha.\theta)\} + \alpha.\theta,$

Properties of Vector Space

$\Rightarrow \theta = \theta + \alpha.\theta,$
$\Rightarrow \theta = \alpha.\theta,$
$\Rightarrow \alpha.\theta = \theta.$

(4) . $(-1)\,.x = -x$ જ્યાં $x \in V$.
દરેક $x \in V$ માટે,
$\therefore (-1)\,x + x,$
$\Rightarrow (-1)\,x + 1.x,$
$\Rightarrow (-1+1)\,x,$
$\Rightarrow 0.x,$
$\Rightarrow \theta,$
આમ,
$(-1)\,.x = -x.$

Examples

Example 1: ગણ R^3 એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે, તેમ સાબિત કરો.

Proof: ધારો કે,

$x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$,

$y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$,

$z = (z_1, z_2, z_3) \in R^3$.

હવે $(x, y, z) \in R^3$ અને $(\alpha, \beta) \in R^3$ સ્વીકારીશું.

$V_1 : x + y = y + x$

LHS $\Leftrightarrow x + y$

$= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$,

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$,

$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$,

$= (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$,

$= y + x \Leftrightarrow$ RHS.

Continued...

Examples

$V_2 : (x + y) + z = x + (y + z)$

LHS $\Leftrightarrow (x + y) + z$

$= \{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)\} + (z_1, z_2, z_3),$

$= \{(x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3\},$

$= \{x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)\},$

$= (x_1, x_2, x_3) + \{(y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)\},$

$= x + (y + z) \Leftrightarrow$ RHS.

$V_3 : x + \theta = \theta + x = x$

$\because \theta = (0, 0, 0) \in R^3,$

LHS $\Leftrightarrow x + \theta,$

$= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0),$

$= (x_1, x_2, x_3),$

$= x.$

Continued...

Examples

$$
\begin{aligned}
&\text{RHS} \Leftrightarrow \theta + x,\\
&= (0 + x_1, 0 + x_2 + 0, 0 + x_3 + 0),\\
&= (x_1, x_2, x_3),\\
&= x.\\
&\therefore \text{LHS=RHS}.\\
&V_4 : x + x' = x' + x = \theta\\
&\because x' = (-x_1, -x_2, -x_3),\\
&\text{LHS} \Leftrightarrow x + x',\\
&= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3),\\
&= \{x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3)\},\\
&= (0, 0, 0),\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Continued...

Examples

RHS $\Leftrightarrow x' + x,$

$= (-x_1, -x_2, -x_3) + (x_1, x_2, x_3)\,,$

$= \{(-x_1) + x_1, (-x_2) + x_2, (-x_3) + x_3\}\,,$

$= (0, 0, 0)\,,$

$= 0.$

$\therefore$ LHS=RHS.

$V_5 : \alpha.\,(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

LHS $\Leftrightarrow \alpha.\,(x + y)\,,$

$= \alpha.\,\{(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)\}\,,$

$= \alpha.\,\{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)\},$

$= \{\alpha.\,(x_1 + y_1)\,, \alpha.\,(x_2 + y_2)\,, \alpha.\,(x_3 + y_3)\}\,,$

$= (\alpha.x_1, \alpha.x_2, \alpha.x_3) + (\alpha.y_1, \alpha.y_2, \alpha.y_3)\,,$

$= \alpha.x + \alpha.y \Leftrightarrow$ RHS

Continued...

Examples

$$
\begin{aligned}
&V_6 : (\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x \\
&\text{LHS} \Leftrightarrow (\alpha + \beta) . x, \\
&= (\alpha + \beta) . \{(x_1, x_2, x_3)\}, \\
&= \{(\alpha + \beta) . x_1, (\alpha + \beta) . x_2, (\alpha + \beta) . x_3\}, \\
&= \{(\alpha . x_1, \alpha . x_2, \alpha . x_3) + (\beta . x_1, \beta . x_2, \beta . x_3)\}, \\
&= \{\alpha . (x_1, x_2, x_3) + \beta . (x_1, +x_2, x_3)\}, \\
&= \alpha . x + \beta . x \Leftrightarrow \text{RHS}. \\
&V_7 : (\alpha . \beta) . x = \alpha . (\beta . x) = \beta . (\alpha . x) \\
&\text{LHS} \Leftrightarrow (\alpha . \beta) . x, \\
&= (\alpha . \beta) . (x_1, x_2, x_3), \\
&= \{(\alpha . \beta . x_1), (\alpha . \beta . x_2), (\alpha . \beta . x_3)\}, \\
&= \{\alpha . (\beta . x_1), \alpha . (\beta . x_2), \alpha . (\beta . x_3)\}, \\
&= \alpha . \{(\beta . x_1), (\beta . x_2), (\beta . x_3)\}, \\
&= \alpha . \{\beta . (x_1, x_2, x_3)\}, \\
&= \alpha . (\beta . x),
\end{aligned} \tag{1}
$$

Examples

RHS $\Leftrightarrow \beta.(\alpha.x)$,
હવે સમીકરણ (1) પરથી,
$= \{\beta.(\alpha.x_1), \beta.(\alpha.x_2), \beta.(\alpha.x_3)\}$,
$= \beta.(\alpha.x_1, \alpha.x_2, \alpha.x_3)$,
$= \beta.(\alpha.x)$,
$\therefore (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$
$V_8 : 1.x = x$
LHS $\Leftrightarrow (1.x)$,
$= 1.(x_1, x_2, x_3)$,
$= (1.x_1, 1.x_2, 1.x_3)$,
$= (x_1, x_2, x_3)$,
$= x \Leftrightarrow$ RHS.
આમ R^3 વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ હોવા માટેની ઉપરોક્ત આઠ પૂર્વધારણાઓનું સમર્થન કરે છે. તેથી R^3 એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે.

Continued...

Examples

Example 2: ગણ $A_{2x2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in R \right\}$ એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે, તેમ સાબિત કરો.

Proof: ધારો કે,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, x_1, x_2, x_3, x_4 \in R,$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}, y_1, y_2, y_3, y_4 \in R,$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}, z_1, z_2, z_3, z_4 \in R.$$

અને

$$\alpha \in F, x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, x \in A_{2x2}, \Rightarrow \alpha.x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ \alpha x_3 & \alpha x_4 \end{bmatrix}.$$

Continued...

Examples

$V_1 : x + y = y + x$

LHS $\Leftrightarrow x + y,$

$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix},$

$= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{bmatrix},$

$= \begin{bmatrix} y_1 + x_1 & y_2 + x_2 \\ y_3 + x_3 & y_4 + x_4 \end{bmatrix},$

$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$

$= y + x \Leftrightarrow$ RHS.

$V_2 : (x + y) + z = x + (y + z)$

LHS $\Leftrightarrow (x + y) + z,$

Continued...

Examples

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}, \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 & (x_2 + y_2) + z_2 \\ (x_3 + y_3) + z_3 & (x_4 + y_4) + z_4 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) & x_2 + (y_2 + z_2) \\ x_3 + (y_3 + z_3) & x_4 + (y_4 + z_4) \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} y_1 + z_1 & y_2 + z_2 \\ y_3 + z_3 & y_4 + z_4 \end{bmatrix} \right\}, \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \right\}, \\
&= x + (y + z) \Leftrightarrow \text{RHS}.
\end{aligned}
$$

Continued...

Examples

$V_3 : x + \theta = \theta + x = x$

$\because \theta = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A_{2x2},$

$\therefore$ LHS $\Leftrightarrow x + 0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = x,$

&, RHS $\Leftrightarrow 0 + x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = x,$

$\Rightarrow$ LHS=RHS.

$V_4 : x + x' = x' + x = \theta$

$\because x' = -x = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 \\ -x_3 & -x_4 \end{bmatrix} \in A_{2x2},$

$\therefore$ LHS $\Leftrightarrow x + (-x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 \\ -x_3 & -x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 = \theta,$

Examples

&, RHS $\Leftrightarrow (-x)+x = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 \\ -x_3 & -x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 = \theta,$

$\Rightarrow$ LHS=RHS.

$V_5 : \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$

LHS $\Leftrightarrow \alpha.(x+y)$,

$$= \alpha \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \right\},$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(x_1 + y_1) & \alpha(x_2 + y_2) \\ \alpha(x_3 + y_3) & \alpha(x_4 + y_4) \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 & \alpha x_2 + \alpha y_2 \\ \alpha x_3 + \alpha y_3 & \alpha x_4 + \alpha y_4 \end{bmatrix},$$

Examples

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ \alpha x_3 & \alpha x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha y_1 & \alpha y_2 \\ \alpha y_3 & \alpha y_4 \end{bmatrix},$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix},$$

$= \alpha x + \alpha y \Leftrightarrow$ RHS.

$V_6 : (\alpha + \beta) .x = \alpha .x + \beta .x$

LHS $\Leftrightarrow (\alpha + \beta) .x,$

$$= (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha + \beta) x_1 & (\alpha + \beta) x_2 \\ (\alpha + \beta) x_3 & (\alpha + \beta) x_4 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 & \alpha x_2 + \beta x_2 \\ \alpha x_3 + \beta x_3 & \alpha x_4 + \beta x_4 \end{bmatrix},$$

Continued...

Examples

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ \alpha x_3 & \alpha x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta x_1 & \beta x_2 \\ \beta x_3 & \beta x_4 \end{bmatrix},$$

$= \alpha x + \beta x \Leftrightarrow$ RHS.

$V_7 : (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$

LHS $\Leftrightarrow (\alpha.\beta).x$,

$$\begin{aligned}
&= (\alpha.\beta) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} (\alpha.\beta) x_1 & (\alpha.\beta) x_2 \\ (\alpha.\beta) x_3 & (\alpha.\beta) x_4 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} \alpha.(\beta x_1) & \alpha.(\beta x_2) \\ \alpha.(\beta x_3) & \alpha.(\beta x_4) \end{bmatrix}, \\
&= \alpha. \begin{bmatrix} (\beta x_1) & (\beta x_2) \\ (\beta x_3) & (\beta x_4) \end{bmatrix}, \\
&= \alpha.(\beta x),
\end{aligned} \tag{1}$$

Examples

RHS $\Leftrightarrow \beta.(\alpha.x)$,
હવે સમીકરણ (1) પરથી,

$$= \begin{bmatrix} \beta.(\alpha x_1) & \beta.(\alpha x_2) \\ \beta.(\alpha x_3) & \beta.(\alpha x_4) \end{bmatrix},$$

$$= \beta. \begin{bmatrix} (\alpha x_1) & (\alpha x_2) \\ (\alpha x_3) & (\alpha x_4) \end{bmatrix},$$

$$= \beta.(\alpha x),$$

$$\therefore (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x).$$

$V_8 : 1.x = x$

LHS $\Leftrightarrow 1.x$,

$$= 1. \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 1.x_1 & 1.x_2 \\ 1.x_3 & 1.x_4 \end{bmatrix},$$

Subspace

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

$= x \Leftrightarrow$ RHS.

આમ A_{2x2} વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ હોવા માટેની ઉપરોક્ત આઠ પૂર્વધારણાઓનું સમર્થન કરે છે. તેથી A_{2x2} એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે.

Subspace (ઉપાવકાશ): જો વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ V નો અરિક્ત ઉપગણ S હોય અને તેમજ V ની ગણિતીય પ્રક્રિયાઓ હેઠળ સદિશ અવકાશ બને તો S ને V નો ઉપાવકાશ કહેવામાં આવે છે.

અરિક્ત ઉપગણ S વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ V નો ઉપાવકાશ બને તે માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત:

(1). દરેક $x, y \in S$ માટે $x + y \in S$,

(2). દરેક $\alpha \in F, x \in S$ માટે $\alpha . x \in S$.

$\therefore$ દરેક $x, y \in S$ & $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha x + \beta y \in S$.

Continued...

Theorem

Theorem (પ્રમેય): જો વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ V ના કોઈ બે ઉપાવકાશો A અને B હોય તો $A \cap B$ પણ V નો ઉપાવકાશ છે.
Proof (સાબિતી): અહીં A અને B એ V ના બે ઉપાવકાશો છે.
$\therefore A \subset V, B \subset V \Rightarrow A \cap B \subset V.$
જો θ એ V નો શૂન્ય સદિશ હોય તો,
$\theta \in A$ & $\theta \in B \Rightarrow \theta \in A \cap B$, આમ $A \cap B \neq \phi$.
હવે, દરેક $x, y \in A \cap B \Rightarrow x, y \in A$ & $x, y \in B$.
$\because A$ અને B ઉપાવકાશ છે, તેથી

$$x + y \in A \ \& \ x + y \in B \Rightarrow x + y \in A \cap B. \tag{1}$$

તથા, દરેક $\alpha \in F$ અને દરેક $x \in A \cap B \Rightarrow \alpha \in F, x \in A$ & $y \in B$.
$\because$ પણ A અને B એ V ના ઉપાવકાશો હોવાથી,

$$\alpha.x \in A \ \& \ \alpha.y \in B \Rightarrow \alpha.x \in A \cap B. \tag{2}$$

હવે સમીકરણ (1) અને (2) પરથી, $A \cap B$ એ V નો ઉપાવકાશ છે.
Note: $A \cup B$ એ V નો ઉપાવકાશ ન હોય.

Examples

Example 1: જો $a, b, c \in R$ તો $W = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 | ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ R^3 નો ઉપાવકાશ છે, તેમ સાબિત કરો.

Proof: અહીં $W = \{(x_1 + x_2 + x_3) \in R^3 | ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$ જ્યાં $a, b, c \in R$.

$\because a.0 + b.0 + c.0 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \in W \Rightarrow W \neq \phi$.

હવે $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ અને $\alpha, \beta \in R$ લેતાં,

$\alpha.x + \beta.y$

$= \alpha (x_1, x_2, x_3) + \beta (y_1, y_2, y_3)$,

$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \in R^3$, અને

$a (\alpha x_1 + \beta y_1) + b (\alpha x_2 + \beta y_2) + c (\alpha x_3 + \beta y_3)$,

$= \alpha (ax_1 + bx_2 + cx_3) + \beta (ay_1 + by_2 + cy_3)$,

$= \alpha.0 + \beta.0, \qquad (\because ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0)$

$= 0$.

આમ, $\alpha.x + \beta.y \in W$. તેથી W એ R^3 નો ઉપાવકાશ છે.

SPAN OR LINEAR SPAN (વિસ્તૃતિ)

Span or Linear Span

Statement (વ્યાખ્યા): ધારો કે V એ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે અને S એ V નો કોઈ અરિક્ત ઉપગણ છે. ગણ S ના ઘટકોના સાન્ત ગણના બધા જ સુરેખ સંયોજનોના ગણને ગણ S ની સુરેખ વિસ્તૃતિ કહે છે. જેને સંકેતમાં $[S]$ અથવા SpS વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આમ,
$[S] = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n, x_1, x_2, \ldots x_n \in S, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in R\}$.
Theorem 1 (પ્રમેય 1): સદિશ અવકાશ V ના કોઈ અરિક્ત ઉપગણ S નો સુરેખ વિસ્તૃતિ ગણ એ V નું એક ઉપાવકાશ છે. વધુમાં, તે S ને સમાવતું નાનામાં નાનું ઉપાવકાશ છે.
Proof (સાબિતી): S નો વિસ્તૃતિ ગણ
$[S] = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n, x_1, x_2, \ldots x_n \in S, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in R\}$.
અહીં $S \subset V$ તથા $S \neq \phi$. ધારો કે $x, y \in S$ અને $\alpha \in R$,
$\therefore x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_m x_m, x_1, x_2, \ldots x_m \in S, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m \in R$,
& $y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots \beta_t y_t, y_1, y_2, \ldots y_t \in S, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_t \in R$.
જે S ના સાન્ત ઘટકો નું સુરેખ સંયોજન છે.
$\therefore x + y \in [S]$.

Theorem

તે જ રીતે ,

$$\alpha.x = \alpha\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m\right), \\ = \left(\alpha\alpha_1\right)x_1 + \left(\alpha\alpha_2\right)x_2 + ... + \left(\alpha\alpha_m\right)x_m.$$

જે S ના સાન્ત ઘટકો નું સુરેખ સંયોજન છે.
$\Rightarrow \alpha.x \in [S]$.
$\therefore [S]$ એ V નું એક ઉપાવકાશ છે.
$x \in S \Rightarrow x = 1.x$,
જે S ના સાન્ત ઘટકો નું સુરેખ સંયોજન છે.
$\Rightarrow x \in [S]$,
$\Rightarrow S \subset [S]$.
તેથી $[S]$ એ ગણ S ને સમાવતું V નું ઉપાવકાશ છે. હવે જો W એ ગણ S ને સમાવતું V નું ઉપાવકાશ હોય તો,

Continued...

Linear Combination

$x \in [S]$,
$\Rightarrow x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...\alpha_n x_n, x_1, x_2, ...x_n \in S, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in R,$
$\because S \subset W,$
$\therefore x_1, x_2, ...x_n \in W, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in R,$
વળી, W એ V નું ઉપાવકાશ હોવાથી, $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...\alpha_n x_n \in W$.
આમ, $[S]$ જ્યાં W એ ગણ S ને સમાવતું V નું ઉપાવકાશ છે.
તેથી $[S] \subset W$ એ S ને સમાવતું નાનામાં નાનું ઉપાવકાશ છે.

Statement (વ્યાખ્યા): જો સદિશ અવકાશ V ના n સદિશો $x_1, x_2, ...x_n$ હોય તથા $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in R$ એ n અદિશો હોય તો સદિશ $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...\alpha_n x_n$ ને સદિશો $x_1, x_2, ...x_n$ નું સુરેખ સંયોજન કહે છે.

Theorem

Theorem 2 (પ્રમેય 2)**:** જો A અને B એ સદિશ અવકાશ V ના ઉપગણ હોય**,**
(1). $A \subset B \Rightarrow [A] \subset [B]$,
(2). $[[A]] = A$.
Proof (સાબિતી)**:** ધારો કે**,**
$A = x_1, x_2, ...x_m$,
$B = x_1, x_2, ...x_n$.
(1). ધારો કે $x \in [A]$**,** તેથી
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...\alpha_m x_m, x_1, x_2, ...x_m \in A, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m \in R.$
$\because x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...\alpha_m x_m + 0.x_{m+1} + ... + 0.x_n,$
તેથી**,** $x \in [B]$.
$\therefore x \in [A] \Rightarrow x \in [B]$,
$\Rightarrow [A] \subset [B]$.

INTERSECTION, ADDITION AND DIRECT SUM OF SUBSPACES (ઉપાવકાશો નો સરવાળો, પ્રત્યક્ષ સરવાળો અને છેદ)

Theorem

(2) . $[[A]] = A$.
ધારો કે,
$[A] = B$
હવે $[A]$ એ V નું ઉપાવકાશ છે. તેથી B એ V નું ઉપાવકાશ છે.
$\therefore [B] = B$,
$\Rightarrow [[A]] = [A] = A$.

Theorem 1 (પ્રમેય 1)**:** જો સદિશ અવકાશ V ના ઉપાવકાશો A અને B હોય તો સાબિત કરો કે $A + B$ પણ V નું એક ઉપાવકાશ છે.

Proof (સાબિતી)**:** ધારો કે, A અને B એ સદિશ અવકાશ V ના ઉપાવકાશો છે, અને $x, y \in A + B$. તેથી ધારો કે,
$x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B$,
$y = y_1 + y_2, y_1 \in A, y_2 \in B$.

Theorem

હવે, $\alpha, \beta \in F$ માટે,
$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2)$,
$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$,
અહીં $x_1, y_1 \in A, x_2, y_2 \in B, A, B$ એ ઉપાવકાશો છે, તેથી $z_1, z_2 \in A + B$,
$\Rightarrow z_1 = x_1 + y_1$ & $z_2 = x_2 + x_2$ જ્યાં $x_1, y_1 \in A, x_2, y_2 \in B$,
$\Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$,
$\Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$,
$\Rightarrow z_1 + z_2 \in A + B$.
તથા $\alpha \in F$ માટે,
$\alpha . z_1 = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 \in A + B$,
જ્યાં $\alpha x_1 \in A$ અને $\alpha y_1 \in B$.
$\Rightarrow A + B$ એ સદિશ અવકાશ V નું એક ઉપાવકાશ છે.

Theorem

Theorem (પ્રમેય) **2:** જો સદિશ અવકાશ Vના ઉપાવકાશો A અને B હોય તો સાબિત કરો કે $[A \cup B] = A + B$.

Proof (સાબિતી)**:** ધારો કે**,** A અને B એ સદિશ અવકાશ Vના ઉપાવકાશો છે. હવે $z \in A + B$,

$\Rightarrow z = x + y, x \in A, y \in B,$

$\Rightarrow z = 1.x + 1.y, x, y \in A \cup B,$

$\Rightarrow z \in [A \cup B]$, તેથી $A + B \subset [A \cup B]$,

$\Rightarrow z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + ... + \beta_m y_m,$

$\Rightarrow z = x + y,$

જ્યાં $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \in A,$

& $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + ... + \beta_m y_m \in B,$

$\Rightarrow z \in A + B,$

$\therefore [A \cup B] \subset A + B,$

$\Rightarrow [A \cup B] = A + B.$

Direct Sum

Statement (વ્યાખ્યા): જો w_1, w_2 એ સદિશ અવકાશ V નો ઉપાવકાશો હોય અને $w_1 \cap w_2 = \{0\}$ થાય તો $w_1 + w_2$ ને ઉપાવકાશો w_1 અને w_2 નું પ્રત્યક્ષ સરવાળો કહેવામાં આવે છે. જેને સંકેતમાં $w_1 \oplus w_2$ વડે દર્શાવાય છે.

Theorem (પ્રમેય) **3:** જો w_1, w_2 એ સદિશ અવકાશ w નો ઉપાવકાશો હોય તેમજ $w = w_1 + w_2$ થાય અને જો કોઈપણ $z \in w$ માટે $z = x + y$ જ્યાં $x \in w_1, y \in w_2$ ના સ્વરૂપે અનન્ય રીતે અભિવ્યક્ત કરી શકાય તો અને તો જ $w = w_1 \oplus w_2$.

Proof (સાબિતી): ભાગ 1: અહીં $w = w_1 + w_2, z = x + y$ જ્યાં $x \in w_1$, $y \in w_2$ અનન્ય રીતે અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે તો આપણે સાબિત કરીશું કે,

$w = w_1 \oplus w_2 \Rightarrow w_1 \cap w_2 = \{0\}$.

ધારો કે $u \neq 0$ અને $u \in w_1 \cap w_2$,

$\Rightarrow u \in w_1$ અને $u \in w_2$, હવે $u \in w$ માટે

$u = u + 0 \Rightarrow u \in w_1, 0 \in w_2$,

$u = 0 + u \Rightarrow 0 \in w_1, u \in w_2$.

Continued...

Theorem

$\therefore$ આપણી ધારણા $u \neq 0$ અને $u \in w_1 \cap w_2$ ખોટી છે.
$\Rightarrow w_1 \cap w_2 = \{0\}$,
$\Rightarrow w = w_1 \oplus w_2$.
<u>ભાગ 2:</u> અહીં $w = w_1 \oplus w_2$ આપેલ છે. આપણે સાબિત કરીશું કે કોઇ પણ $z \in w$ ને $x \in w_1$ અને $y \in w_2$ દ્વારા અનન્ય રીતે અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે.
ધારો કે,
$z = x + y, x \in w_1, y \in w_2$, અને
$z = x' + y', x' \in w_1, y' \in w_2$,
$\Rightarrow x + y = x' + y'$,
$\Rightarrow x - x' = y - y'$,
$\Rightarrow x - x' \in w_1 \cap w_2 = \{0\}$ & $y - y' \in w_1 \cap w_2 = \{0\}$,
$\Rightarrow x - x' = 0$ & $y - y' = 0$,
$\Rightarrow x = x'$ & $y = y'$.
આપણી ધારણા $z = x + y$ & $z = x' + y'$ ખોટી છે. તેથી $z \in w$ ને $x \in w_1$ અને $y \in w_2$ દ્વારા અનન્ય રીતે અભિવ્યક્ત કરી શકાય છે.

Bibliography I

References

[1]. **Linear Algebra**, 1996-1997 edition, **Akta Prakashan**, Nadiad, Gujarat by Prof. S.B. Shah, N.N. Rodheliya, K.K. Patel, V.L. Shukla, A. Gaur, S.J. Shah, V.J. Modi, R.D. Mehta, A.M. Rabari, A.V. Kadiya, P.V. Trivedi and H.M. Patel.

[2]. **Linear Algebra-I**, 2014-2015 edition, **Nirav Prakashan**, Ahmedabad, Gujarat by Prof. I.H. Sheth.

THANK YOU